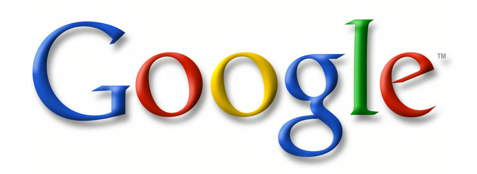
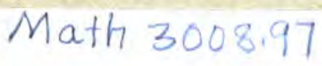
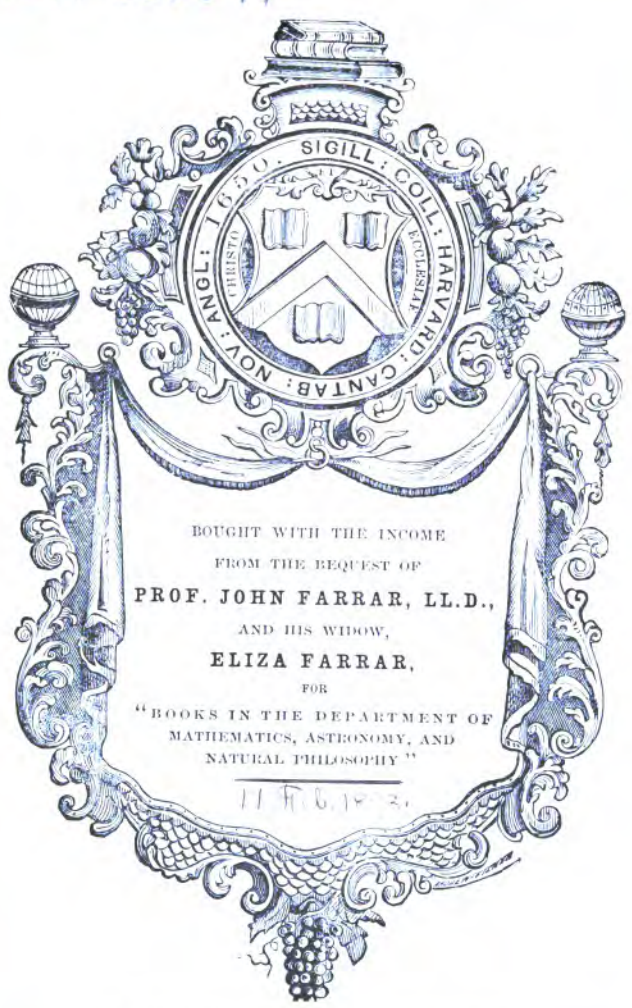
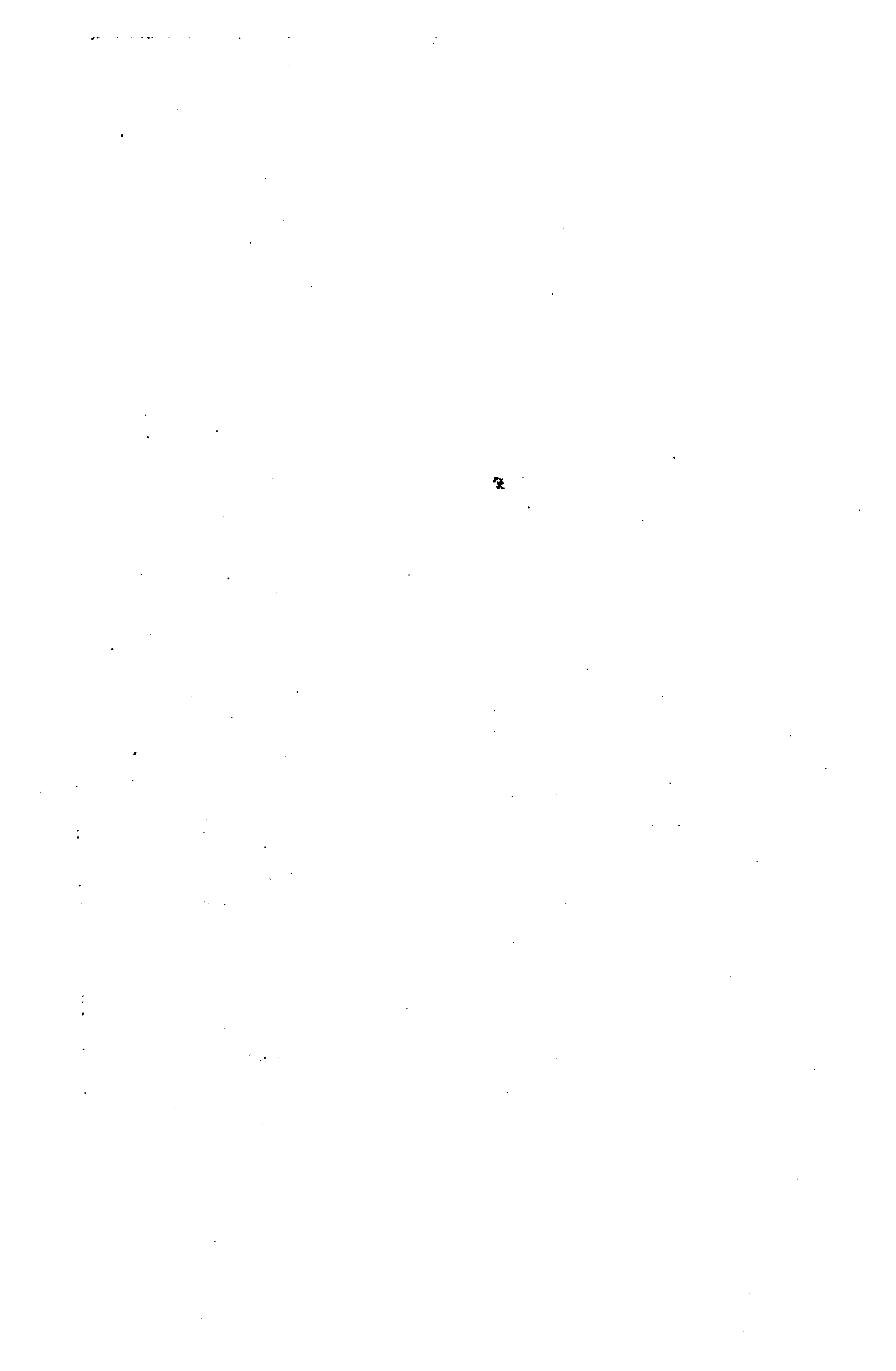
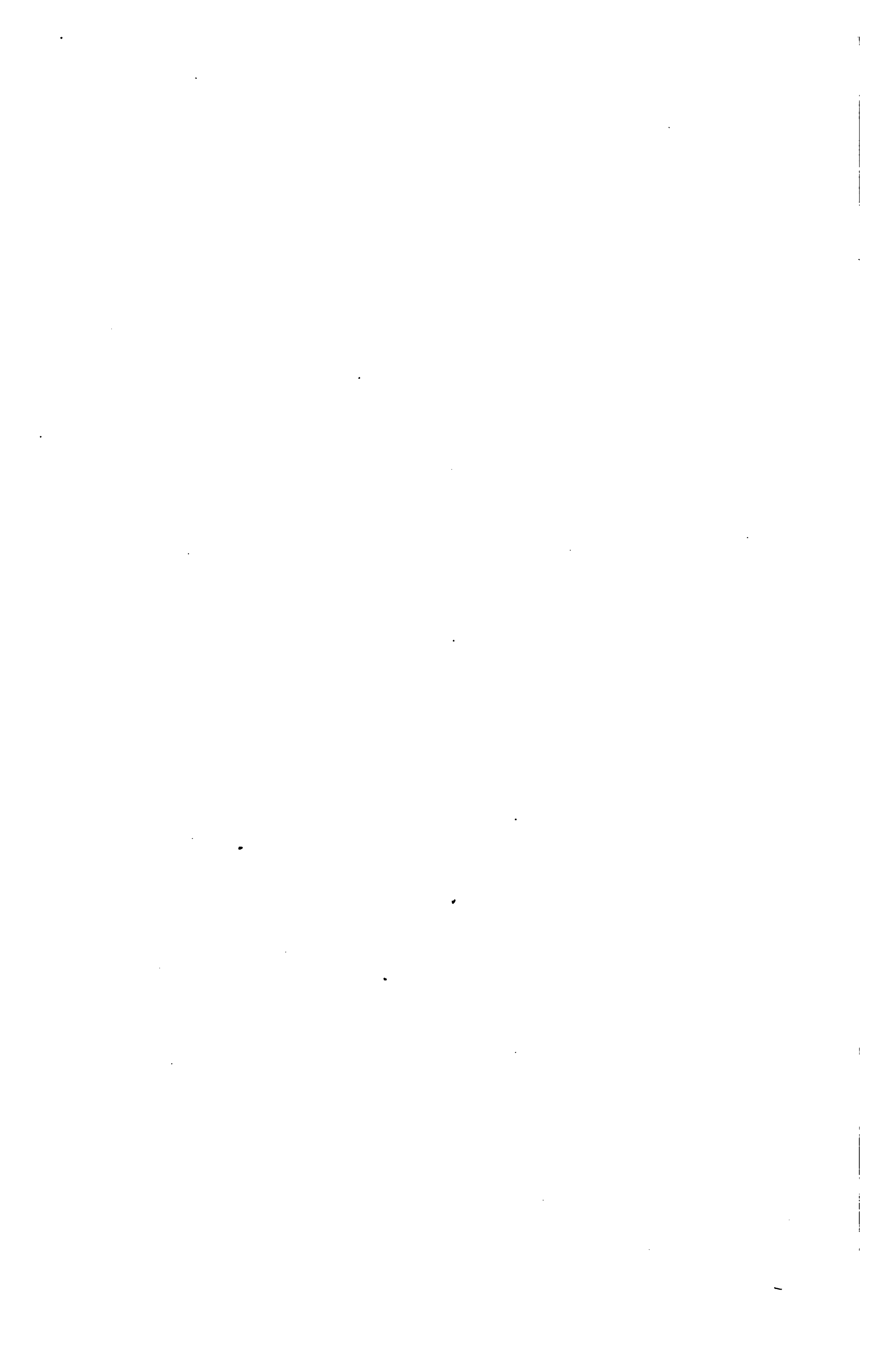





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE





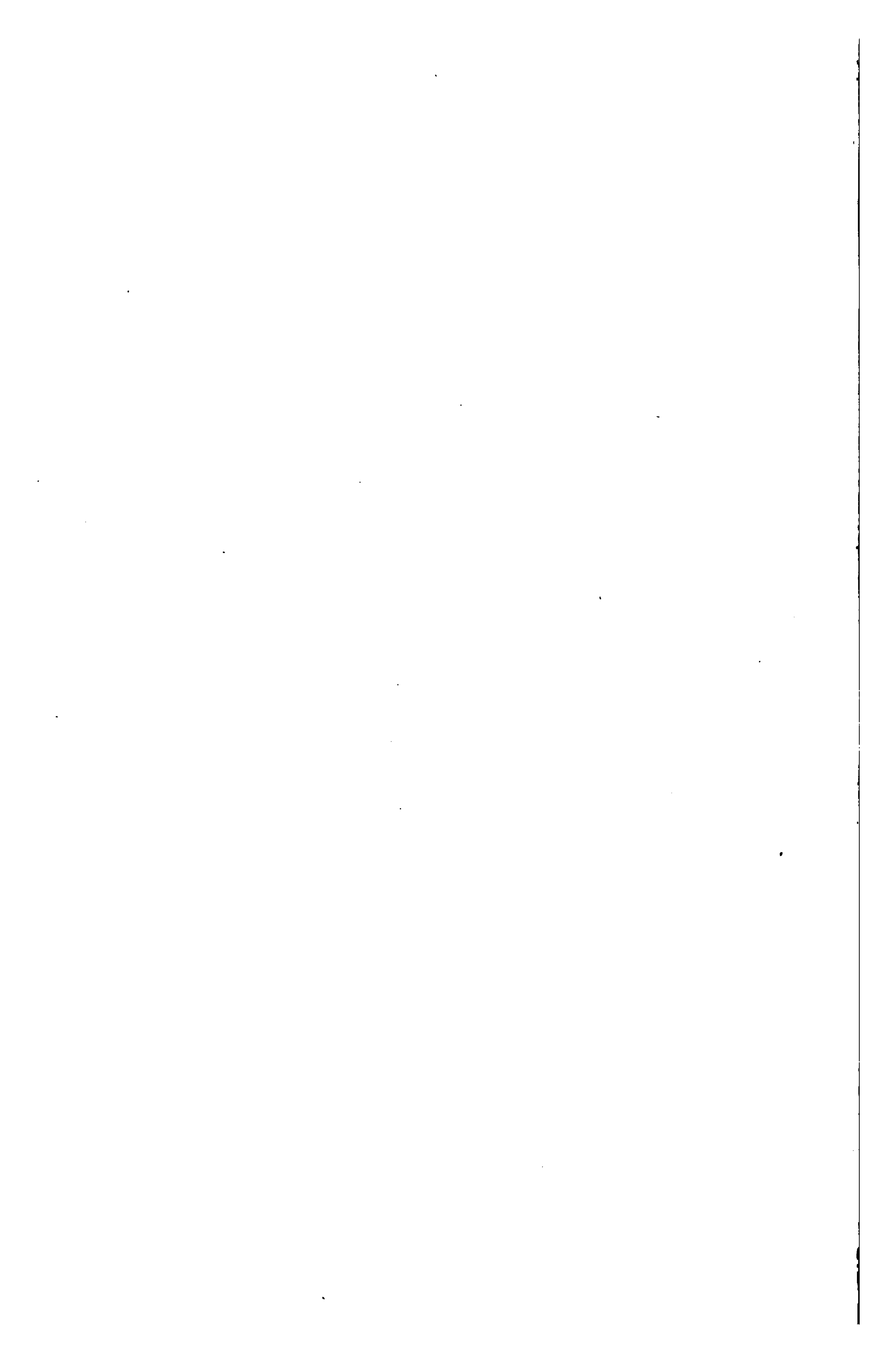


HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

DRITTER THEIL



HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG

DRITTER THEIL

MIT 9 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1897

VORWORT.

Mit dem gegenwärtigen dritten Heftchen kommt der Leitfaden zur Vorlesung über Differential- und Integralrechnung zum Abschluss. Der hier in seinen Grundzügen entwickelte Stoff entspricht der Vorlesung, welche an der hiesigen Hochschule im dritten Studiensemester den Studirenden des Ingenieurbauwesens und des Maschinenbaues dargeboten wird.

Uebrigens ist es mir nicht jedesmal gelungen, die Vorlesung in dem hier skizzirten Umfange vollständig zu erschöpfen; denn die Besprechung der Beispiele (welche der Leitfaden nicht giebt) erfordert bei dieser Vorlesung den grösseren Theil der Zeit. So wolle man die Darstellung in ihrem letzten Theile nur mehr als die obere Grenze dessen ansehen, was in der genannten Vorlesung hierselbst entwickelt wird.

Es wird hoffentlich keinerlei Bedenken erregen, wenn ich mich in dieser Weise bei der Abgrenzung der Vorlesung je nach Umständen einrichte. Können doch ohnehin die mathematischen Vorlesungen an den Hochschulen bei der ihnen zur Verfügung stehenden Zeit nicht jeden Fall der späteren Anwendungen vorbereiten. Es ist ja auch wohl das anerkannte Ziel dieser Vorlesungen, dass sie dem Studirenden insoweit Schulung im mathematischen Denken und Fähigkeit im Operiren vermitteln, dass derselbe auch solchen später an ihn herantretenden theoretischen Fragen gewachsen ist, welche sich nicht unmittelbar einer eingelernten Regel unterordnen.

Braunschweig, im October 1897.

Robert Fricke.



INHALTSVERZEICHNISS.

XV. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

XVI. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Variabelen.

XVII. Capitel.

Andeutungen über Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabelen.

XV. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

1. Definition und Gestalt der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die nächsten Betrachtungen beziehen sich auf eine reelle unabhängige Variabele x und eine reelle Function y von x.

Der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ von y nach x soll öfters abgekürzt y' geschrieben werden, und entsprechend bezeichnen wir späterhin die höheren Differentialquotienten durch y'', y''',...

Erklärung: *Eine Gleichung von der Gestalt:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, y') = 0,$$

in welcher neben x und y auch noch der Differentialquotient erster Ordnung y' vorkommt, heisst eine Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unabhängigen und einer abhängigen Variabelen.

Man spricht auch von einer *„gewöhnlichen“* Differentialgleichung im Gegensatze zu *„partiellen“* Differentialgleichungen, welche sich auf mehrere unabhängige Variabelen beziehen.

Als Beispiel einer Differentialgleichung (1) gelte:

$$(3\,x^2 - 7\,y^2)\,\frac{dy}{dx} - 17\,x + 12\,xy = 0.$$

Löst man die Gleichung (1) nach $y' = \frac{dy}{dx}$ auf, so nimmt sie die *zweite* Gestalt an:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dy}{dx} = G(x, y),$$

wo die rechte Seite nur noch x und y, aber nicht mehr y' enthält.

Man multiplicire endlich die Gleichung (2) mit $\Psi(x, y)\,dx$, wo $\Psi(x, y)$ eine beliebige Function von x und y ist, und man setze zur Abkürzung:

$$\Psi(x, y) \,.\, G(x, y) = -\,\Phi(x, y).$$

Man gewinnt alsdann aus (2) als *dritte* Gestalt der Differentialgleichung:

(3) . . . . . $\Phi(x, y)\,dx + \Psi(x, y)\,dy = 0.$

Hierbei merke man an, *dass in (3) die x und y allein enthaltenden Functionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ nur insoweit bestimmt sind, dass ihr Quotient $\Phi : \Psi$ mit $-G(x, y)$ identisch ist.*

2. Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen.

Erklärung: *Die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ auflösen heisst eine solche Function $y = f(x)$ von x angeben, dass die Gleichung:*

(1) . . . . $F[x, f(x), f'(x)] = 0$

für jeden Werth von x richtig ist und also in x eine „identische" Gleichung darstellt.

Eine solche Function $y = f(x)$ heisst eine „*Integralfunction*" oder kurz ein „*Integral*" der gegebenen Differentialgleichung. Ist die Integralfunction implicite durch eine Gleichung:

(2) . . . . $g(x, y) = 0$

gegeben, so heisst letztere eine „*Integralgleichung*" der vorgelegten Differentialgleichung.

So gehört z. B. zur Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

als ein Integral die Function $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Erklärung: *Die Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen $F(x, y, y') = 0$ ist, die Lösung derselben zu leisten, d. i. zu untersuchen, ob für eine vorgelegte Differentialgleichung überhaupt ein Integral existirt, sowie, falls es deren mehrere giebt, dieselben insgesammt anzugeben.*

3. Gradeintheilung der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es gelte jetzt die specielle Annahme, dass $F(x, y, y')$ in y und y' (aber nicht nothwendig in x) rational und ganz sei. Ein Beispiel für Differentialgleichungen dieser Art gebe:

(1) . . . $3xy^2 + 7yy'^2 \sin x - 25y + 3 = 0.$

Die Summe der Exponenten von y und y' im einzelnen Gliede von $F(x, y, y')$ liefere den *Grad* dieses Gliedes.

Erklärung: *Man spricht im vorliegenden Falle von einer Differentialgleichung erster Ordnung m^{ten} Grades, falls in $F(x, y, y')$ ein Glied m^{ten} Grades, jedoch keines von höherem Grade vorkommt.*

Die Differentialgleichung (1) ist hiernach eine solche dritten Grades.

Eine Differentialgleichung ersten Grades heisst auch eine „*lineare*“ Differentialgleichung.

Sind alle Glieder einer Differentialgleichung von gleichem Grade, so heisst dieselbe „*homogen*“.

4. Einführung einer geometrischen Deutung.

Die Variabelen x und y mögen als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene gedeutet werden. Es soll dann von der „*Umgebung*“ eines Punktes der Coordinaten x, y im Sinne von XIII, 1 und von einem in der Ebene eingegrenzten „*Bereiche*“ wie in IX, 3 gesprochen werden.

Eine vorgelegte Differentialgleichung denke man auf die zweite Form:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

gebracht. Man denke einen Bereich B in der Ebene eingegrenzt, innerhalb dessen die Function $G(x, y)$ eindeutig und stetig ist. Ist diese Function zunächst etwa mehrdeutig, so wird hiernach angenommen, dass für den einzelnen Punkt von B unter den verschiedenen zugehörigen Werthen der Function ein bestimmter aufgegriffen und zunächst allein mit $G(x, y)$ bezeichnet sei.

Für die so präcisirte Differentialgleichung sei eine Integralgleichung:

$$(2) \quad g(x, y) = 0$$

bekannt. Dieselbe stellt geometrisch eine in der Ebene gelegene Curve dar; wir bezeichnen die letztere als eine „*Integralcurve*“ der Differentialgleichung (1).

Sei nun auf einem etwa im Bereiche B verlaufenden Stücke der Integralcurve (2) ein beliebiger Punkt P der Coordinaten x_0, y_0 markirt. Die Ableitung der durch (2) implicite definirten Function y nach x werde für das Argument x_0 durch y'_0 bezeichnet und berechnet sich nach XII, 3 in der Gestalt:

$$(3) \quad y'_0 = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}.$$

Da nach Einsetzung der Integralfunction y und ihrer Ableitung y' in (1) diese Gleichung für jedes x richtig ist, so stimmt der in (3) berechnete Werth y'_0 mit $G(x_0, y_0)$ überein.

Bei der bekannten, durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha$ ausgesprochenen geometrischen Bedeutung der Ableitung y' (vergl. II, 2) entspringt hieraus (unter Fortlassung der Indices bei x_0, y_0) folgender

L e h r s a t z: *Die Fortschreitungsrichtung der Integralcurve (2) in*

irgend einem ihrer Punkte x, y ist auf Grund der Gleichung:

$$tg\ \alpha = G\ (x,\ y)$$

durch die Differentialgleichung (1) selbst gegeben.

Dieser Satz spricht die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung (1) aus.

5. Construction einer Integralcurve aus Curvenelementen.

Der zuletzt aufgestellte Lehrsatz ist der Umkehrung fähig:

Lehrsatz: *Weiss man von einer durch $g\ (x,\ y) = 0$ gegebenen Curve, dass in jedem ihrer Punkte x, y die Function $tg\,\alpha$ des Richtungswinkels α mit $G\ (x,\ y)$ übereinstimmt, so ist jene Curve eine Integralcurve der Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{dy}{dx} = G\ (x,\ y).$$

In der That ist ja die Gleichung (1) durch die vermöge $g\ (x, y) = 0$ definirte Function y für jedes x erfüllt.

Hieraus entspringt bei vorgegebener Differentialgleichung (1) die Möglichkeit der „*Construction einer Integralcurve durch Aneinanderreihung von Curvenelementen*“.

Um $G\ (x,\ y)$ als eindeutig und stetig voraussetzen zu dürfen, schränken wir die Betrachtung wieder auf den oben gedachten Bereich B ein und wählen in letzterem einen beliebigen Ausgangspunkt P_0 der Coordinaten x_0, y_0. Von P_0 aus ziehe man in der durch $tg\ \alpha_0 = G\,(x_0,\ y_0)$ angezeigten Richtung ein Curvenelement $d s_0$ mit dem Endpunkte P_1 der Coordinaten $x_1 = x_0 + dx$, $y_1 = y_0 + dy$. Entsprechend zeichne man von P_1 aus ein zweites Element ds_1 in der durch $tg\ \alpha_1 = G\ (x_1, y_1)$ angegebenen Richtung und fahre in gleicher Weise fort. Man gewinnt so, wie Fig. 1 versinnlichen mag, eine Curve, in der man nach dem soeben ausgesprochenen Lehrsatze eine Integralcurve der Differentialgleichung (1) erkennt.

Fig. 1.

6. Die Schaar der Integralcurven einer Differentialgleichung.

Da der Ausgangspunkt P_0 der eben durchgeführten Construction innerhalb B willkürlich wählbar war, so gewinnt man in der bezeichneten Art nicht nur eine, sondern *unendlich viele Integralcurven einer und derselben Integralgleichung:*

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{dy}{dx} = G\ (x,\ y),$$

wie dies durch die in Fig. 2 ausgeführte Skizze näher angedeutet sein mag.

Es geht sogar, da $G(x, y)$ innerhalb B als eindeutig vorausgesetzt wurde, durch *jeden* Punkt dieses Bereiches *eine* Integralcurve von (1) hindurch, so dass B schlicht von Integralcurven bedeckt erscheint.

Fig. 2.

Hiermit haben wir Anschluss gewonnen an die in XIV, 5 gegebenen Entwickelungen über „*Curvenschaaren*“, welche wir damals durch Gleichungen der Form $f(x, y, p) = 0$ darstellten, unter p einen „*Parameter*“ verstanden.

In der That gilt folgender

Lehrsatz: *Für jede Differentialgleichung (1) existirt eine vermöge einer Gleichung:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad g(x, y, C) = 0$$

darstellbare Schaar von Integralcurven, wo C eine „willkürlich zu wählende Constante“ ist bezw. den „Parameter“ der Curvenschaar liefert.

Dass die oben construirte Schaar der Integralcurven durch eine Gleichung (2) darstellbar ist, kann man vermöge analytischer Entwickelungen zeigen, bei denen die Integralfunction y in eine Mac-Laurin'sche Reihe entwickelt wird. Da indessen die zugehörige Convergenzbetrachtung umständlich ist, so wird diese Rechnung hier nicht ausgeführt.

Ueberdies gilt der obige Lehrsatz nicht nur für den Bereich B, sondern allgemein. Dabei erhält man als weiteres Ergebniss, *dass durch den einzelnen Punkt x, y immer m Integralcurven hindurchlaufen, falls in der Umgebung dieses Punktes G (x, y) eine m-deutige Function ist.* Doch erfordert die erschöpfende Behandlung dieser Sätze weitergehende functionentheoretische Entwickelungen, für welche hier nicht der Ort ist.

Leicht beweisbar ist die Umkehrung:

Lehrsatz: *Ist irgend eine Curvenschaar vermöge einer Gleichung (2) gegeben, so giebt es stets eine Differentialgleichung:*

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

für welche jene Schaar die Integralcurven liefert.

Berechnet man nämlich für beliebig, aber fest gewähltes C, d. i. für irgend eine Curve der Schaar den Werth von $y' = \frac{dy}{dx}$, so dient nach XII, 3 hierzu die Gleichung:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dg}{dx} + \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminirt man C aus den Gleichungen (2) und (4), so ergiebt sich eine zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ bestehende Relation (3), welche für jede Curve der Schaar und zwar für jeden ihrer Punkte erfüllt ist.

7. Das allgemeine Integral und die particulären Integrale einer Differentialgleichung.

Die Gleichung:

(1) . . . . $g(x, y, C) = 0$

lieferte für jeden Werth von C eine implicite definirte Integralfunction y unserer Differentialgleichung.

Erklärung: *Denkt man in (1) den Werth von C noch gänzlich unbestimmt gelassen, so sagt man, die Gleichung (1) liefere das „allgemeine Integral“ oder die „allgemeine Integralgleichung“; jede besondere Auswahl von C liefert ein „particuläres Integral“ der Differentialgleichung.*

Die einzelne Curve aus der Schaar der Integralcurven entspricht demnach stets einem particulären Integral.

Wollen wir die Integralfunction explicite darstellen, so bedienen wir uns im Anschluss an Nr. 2 (S. 2) der Bezeichnung:

(2) . . . . $y = f(x, C)$.

8. Lösung von Differentialgleichungen durch Quadraturen.

Ist die rechte Seite G einer in die zweite Gestalt gesetzten Differentialgleichung von y unabhängig, so kann diese Gleichung auch geschrieben werden:

(1) . . . . $dy = G(x)\,dx$.

In diesem Falle ist also das Differential dy der gesuchten Function y in dx und x allein dargestellt; die gewöhnliche Integralrechnung liefert somit:

(2) . . . . $y = \int G(x)\,dx + C$.

Beim Gebrauch eines bestimmten Integrals lässt sich die Constante C auch durch eine willkürlich zu wählende untere Grenze a ersetzen:

(3) . . . . $y = \int_a^x G(x)\,dx$.

Wegen der ursprünglichen in VI, 6 entwickelten geometrischen Bedeutung der Integrale bezeichnet man die Berechnung eines bestimmten oder auch unbestimmten Integrals kurz als eine „*Quadratur*“.

Man sagt alsdann, die Differentialgleichung (1) sei „durch eine Quadratur lösbar.“

Es gilt der Satz, *dass viele (aber keineswegs alle) Differentialgleichungen erster Ordnung entweder unmittelbar oder nach geeigneten Transformationen durch Quadraturen lösbar sind.*

Auf derartige Auflösungen durch Quadraturen beziehen sich die zunächst zu entwickenden Regeln.

9. Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variabelen.

Lehrsatz: *Gelingt es, eine gegebene Differentialgleichung in der Weise in die dritte Gestalt (3) S. 2 zu setzen, dass* Φ *nur von* x *und* Ψ *nur von* y *abhängt:*

(1) . . . . $\Phi(x)\,dx + \Psi(y)\,dy = 0,$

so wird das allgemeine Integral durch Quadraturen in der Form:

(2) . . . . . $\int \Phi(x)\,dx + \int \Psi(y)\,dy = C$

gewonnen. Diese Art der Lösung wird als die „Methode der Trennung der Variabelen" bezeichnet, insofern im ersten Gliede von (1) nur x *und* dx, *im zweiten nur* y *und* dy *vorkommen.*

Um Formel (2) zu beweisen, führe man eine dritte Variabele z ein, indem man $dz = \Phi(x)\,dx$ setzt. Dann ist $dz = -\Psi(y)\,dy$, und man hat somit:

$$z = \int \Phi(x)\,dx + C_1, \quad -z = \int \Psi(y)\,dy + C_2.$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert Formel (2), falls man die negative Summe von C_1 und C_2 durch C bezeichnet. —

Beispiel: Es sollen alle ebenen Curven gefunden werden, für welche die Subtangente jedes Punktes die constante Länge 1 hat.

Nach V, 2 ist die Subtangente St im einzelnen Punkte einer Curve durch $y\,\frac{dx}{dy}$ dargestellt. Soll demnach St stets $= 1$ sein, so gilt die Gleichung:

$$y\,\frac{dx}{dy} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = y;$$

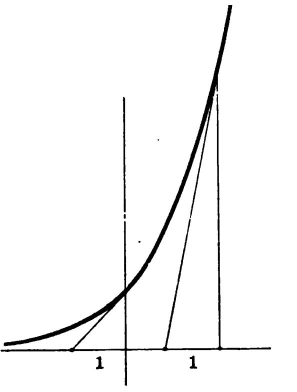
dieselbe stellt die „Differentialgleichung der gesuchten Curve" dar.

Die Trennung der Variabelen und Lösung wird vollzogen durch:

$$dx - \frac{dy}{y} = 0, \quad x - \log y = C,$$

woraus man $y = e^{x-C}$ als allgemeines Integral erhält.

Fig. 3.



Für $C = 0$ gewinnt man die Exponentialcurve, für welche die Eigenschaft constanter Subtangente durch Fig. 3 (a. v. S.) versinnlicht werden mag. Alle übrigen Integralcurven gehen aus der Exponentialcurve durch Verschiebung im Sinne der x-Axe hervor.

10. Lösung der Differentialgleichungen von der Gestalt $\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$.

Die Function G von x und y möge jetzt im Speciellen so gebaut sein, dass sie als Function allein vom Quotienten $\frac{y}{x}$ angesehen werden kann; wir bedienen uns dieserhalb direct der Schreibweise $G\left(\frac{y}{x}\right)$ und haben es hiernach zu thun mit der Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Lehrsatz: *Die Auflösung der Differentialgleichung (1) gelingt nach Substitution der neuen Variabelen $z = \frac{y}{x}$ vermöge der Methode der Trennung der Variabelen und liefert als allgemeine Integralgleichung:*

$$(2) \quad \log x - \int \frac{dz}{G(z) - z} = C,$$

wobei man nach Berechnung des Integrals linker Hand für z wieder $\frac{y}{x}$ gesetzt denke.

Durch Differentiation von $y = xz$ folgt nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

so dass sich die Differentialgleichung (1) transformirt in:

$$x\frac{dz}{dx} + z = G(z) \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x} - \frac{dz}{G(z) - z} = 0.$$

Hier ist die Trennung der Variabelen vollzogen und die Integration liefert die Formel (2).

Beispiel: Um das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{y}{x}$$

zu gewinnen, führe man z wie oben ein, wodurch die Differentialgleichung übergeht in:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0.$$

Die Integration und Wiedereinführung von y liefert:

$$x(x + 2y) = C.$$

11. Lösung der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Nach Nr. 3 (S. 3) hat eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung die Gestalt:

$$F(x)\frac{dy}{dx} + G(x)\,y + H(x) = 0,$$

wo $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ beliebige Functionen von x sind.

Dividirt man diese Gleichung durch $F(x)$ und nennt die Quotienten von G durch F und H durch F kurz $P(x)$ und $Q(x)$, so folgt als *„Normalform einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung“:*

$$(1) \quad \cdots\cdots \quad \frac{dy}{dx} + P(x)\,y + Q(x) = 0.$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, verstehen wir unter z irgend ein particuläres Integral der linearen homogenen Differentialgleichung:

$$(2) \quad \cdots\cdots \quad \frac{dz}{dx} + P(x)\,z = 0,$$

die mit (1) in den beiden ersten Gliedern gleichgebaut ist.

Die Gleichung (2) ist durch Trennung der Variabelen lösbar und liefert:

$$(3) \quad \cdots\cdots \quad z = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Der Quotient von y und z heisse u; dann ist:

$$y = zu, \quad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

so dass die Differentialgleichung (1) die Gestalt annimmt:

$$z\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dz}{dx} + zP(x)\right) + Q(x) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (2):

$$z\frac{du}{dx} + Q(x) = 0, \quad du = -\frac{Q(x)}{z}\,dx.$$

Da z als Function von x aus (3) bekannt ist, so folgt durch Integration der letzten Differentialgleichung:

$$u = C - \int \frac{Q(x)}{z}\,dx,$$

wo C die Integrationsconstante ist.

Durch Wiedereinführung von y und Einsetzung des in (3) berechneten Ausdrucks von z ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung (1) ist durch Quadraturen lösbar und besitzt als allgemeines Integral:*

$$(4) \quad . \quad . \quad y = e^{-\int P(x)\,dx} \cdot \left[C - \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right].$$

Eine andere Auswahl der Integrationsconstanten bei $\int P(x)\,dx$ hat allein eine Veränderung der Constanten C in (4) zur Folge.

Beispiel: Im Falle der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}\,y - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ist die Function z gegeben durch:

$$z = e^{\int \frac{x\,dx}{1+x^2}} = e^{\frac{1}{2}\log(1+x^2)} = \sqrt{1+x^2}.$$

Die oben mit u bezeichnete Function wird demnach hier:

$$u = C + \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = C + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

und man findet als allgemeines Integral:

$$y = x + C\sqrt{1+x^2}.$$

12. Der integrirende Factor einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung sei in der dritten Gestalt:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Phi(x,y)\,dx + \Psi(x,y)\,dy = 0$$

gegeben. Wir multipliciren die linke Seite mit einer sogleich näher zu definirenden Function $\mu(x,y)$ von x und y und erhalten so unter Gebrauch der Abkürzungen:

$$(2) \qquad \mu(x,y)\,\Phi(x,y) = \varphi(x,y), \quad \mu(x,y)\,\Psi(x,y) = \psi(x,y)$$

als neue Gestalt der Differentialgleichung:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0.$$

Erklärung: *Die Function $\mu(x,y)$ heisst ein „integrirender Factor" der gegebenen Differentialgleichung (1), falls die linke Seite von (3) für „unabhängig gedachte Variabele x, y" im Sinne von XII, 8 ein totales Differential darstellt.*

Es gilt nun zunächst der folgende

Lehrsatz: *Für jede Differentialgleichung (1) existirt wenigstens ein integrirender Factor.*

Es existirt nämlich für (1) eine Integralgleichung $g(x,y,C) = 0$, die wir nach C auflösen und in die Gestalt setzen:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h(x,y) = C.$$

Hieraus ergiebt sich nach Nr. 4 ff., dass der aus (4) zu berechnende Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}}$$

für alle Werthepaare x, y mit dem aus (1) entspringenden Quotienten $-\frac{\Phi}{\Psi}$ gleich ist; es wird mithin die Gleichung:

$$-\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}} = -\frac{\Phi}{\Psi} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\Phi(x,y)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\Psi(x,y)}$$

identisch, d. i. für unabhängig von einander gedachte x, y bestehen.

Nennt man jetzt den gemeinsamen Werth der rechten und linken Seite der letzten Gleichung als Function von x und y sogleich $\mu(x,y)$, so ist μ in der That ein integrirender Factor; denn $(\mu\Phi dx + \mu\Psi dy)$ ist das totale Differential der Function $h(x,y)$. —

Lehrsatz: *Für die Differentialgleichung (1) existiren unendlich viele integrirende Factoren, welche sämmtlich durch einen von ihnen, z. B. den eben gewonnenen, in der Gestalt darstellbar sind:*

(5) . . . . $\mu(x,y) \cdot \chi[h(x,y)]$;

hierbei bedeutet χ eine willkürlich zu wählende Function.

Man bezeichne nämlich, indem man x und y auch weiterhin als unabhängig von einander ansieht, $h(x,y)$ als Function von x und y abgekürzt durch $z = h(x,y)$.

Dann gilt für das totale Differential dz:

$$\mu\Phi dx + \mu\Psi dy = dz,$$

woraus sich durch Multiplication mit der willkürlich zu wählenden Function $\chi(z)$ ergiebt:

$$\mu\chi(\Phi dx + \Psi dy) = \chi(z)dz = d\left[\int \chi(z)dz\right].$$

Das Integral rechter Hand denke man ausgerechnet und sodann $z = h(x,y)$ gesetzt; alsdann steht rechts das totale Differential einer Function von x und y, so dass $\mu\chi$ in der That ein integrirender Factor ist.

Ist andererseits $M(x,y)$ ein beliebiger integrirender Factor, und möge die mit M multiplicirte linke Seite der Differentialgleichung (1) das totale Differential der Function $Z = H(x,y)$ darstellen:

$$M(\Phi dx + \Psi dy) = dH(x,y),$$

so gilt die Gleichung:

$$\Phi dx + \Psi dy = \frac{dZ}{M} = \frac{dz}{\mu}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad dZ = \left(\frac{M}{\mu}\right) dz,$$

Man denke jetzt y aus $z = h(x, y)$ in x und z dargestellt und in $Z = H(x, y)$ eingesetzt. Hierdurch wird Z eine Function der beiden Variabelen x und z. Für das totale Differential dZ gilt demnach:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial z} dz.$$

Der Vergleich dieses Ausdrucks für dZ mit dem in (6) berechneten Werthe desselben totalen Differentials dZ zeigt, dass $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ ist, d. h. dass Z von z allein abhängt. Gleiches gilt demnach auch von $\frac{\partial Z}{\partial z}$. Setzen wir in diesem Sinne $\frac{\partial Z}{\partial z} = \chi(z)$, so wird:

$$dZ = \chi(z)\, dz,$$

womit der aufgestellte Satz im vollen Umfange bewiesen ist.

13. Auflösung der Differentialgleichung vermöge eines integrirenden Factors.

Lehrsatz: *Liefert die linke Seite einer Differentialgleichung (1) Nr. 12 nach Zusatz eines integrirenden Factors μ das totale Differential $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$ der Function $h(x, y)$, so ist die allgemeine Integralgleichung:*

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad h(x, y) = C.$$

Es folgt nämlich aus (1):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}} = -\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

und also hat die bei irgendwie gewähltem C durch (1) dargestellte Curve in jedem ihrer Punkte die durch die Differentialgleichung vorgeschriebene Richtung (vergl, Nr. 5, S. 4).

Die Berechnung von $h(x, y)$ aus φ und ψ leistet man nach XII, 8 vermöge der Formel:

$$(2) \quad . \; . \quad h(x, y) = \int \varphi\, dx + \int \left[\psi - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi\, dx\right] dy.$$

14. Partielle Differentialgleichung für den integrirenden Factor.

Als hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$ ein totales Differential ist, hat man nach XII, 8 das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}.$$

Für einen integrirenden Factor μ der Differentialgleichung (1), Nr. 12 muss hiernach die Gleichung gelten:

$$\frac{\partial(\mu \Phi)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \Psi)}{\partial x}.$$

Durch Weiterentwickelung dieser Relation entspringt der

Lehrsatz: *Jeder integrirende Factor μ der Differentialgleichung (1), Nr. 12 befriedigt die „partielle Differentialgleichung erster Ordnung“:*

$$(1) \quad \ldots \quad \Psi \frac{\partial \mu}{\partial x} - \Phi \frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \mu = 0,$$

und umgekehrt ist jede diese Gleichung befriedigende Function $\mu(x, y)$ ein integrirender Factor.

Hier gelten Ψ, Φ und der Ausdruck in der Klammer als gegebene Functionen von x und y, während μ als die gesuchte Function der beiden „unabhängigen“ Variabelen x und y anzusehen ist.

Besonders wichtig sind die beiden Specialfälle, dass es einen von y oder einen von x unabhängigen integrirenden Factor giebt.

Gilt der erstere Fall, so ist für das betreffende μ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d \mu}{d x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{d y} = 0$$

zu setzen, so dass die Gleichung (1) liefert:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}}{\Psi}.$$

Da μ hier nur von x abhängt, so muss dasselbe von der linken und also auch der rechten Seite dieser Gleichung gelten.

Kommt andererseits rechts y nicht mehr vor, so findet man durch Lösung der „gewöhnlichen“ Differentialgleichung (2) für μ eine Function von x allein, die nach obigem Lehrsatze einen integrirenden Factor liefert:

Lehrsatz: *Zeigt sich, dass aus dem Quotienten* $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right) : \Psi$ *die Variabele y herausfällt, so giebt es den nur von x abhängenden integrirenden Factor:*

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu = C . e^{\int \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\Psi} . dx}.$$

Entsprechendes gilt für den Fall, dass ein nur von y abhängender integrirender Factor existirt. —

Beispiel: Für die Differentialgleichung:

$$(x^2 y + y + 1)\, dx + (x + x^3)\, dy = 0$$

ergiebt sich:

$$\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}}{\Psi} = - \frac{2x}{1+x^2},$$

so dass hier ein von y unabhängiger integrirender Factor existirt.

Für denselben findet man aus Formel (3), indem man $C = 1$ setzt:

$$\mu = \frac{1}{1+x^2},$$

so dass die mit μ multiplicirte Differentialgleichung:

$$\left(y + \frac{1}{1+x^2}\right) dx + x\,dy = 0$$

lautet.

Formel (2), Nr. 13 liefert als allgemeines Integral:

$$xy + arc\,tg\,x = C.$$

15. Von den singulären Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung.

In XIV, 5 wurde unterschieden, ob eine Curvenschaar eine einhüllende Curve besitzt oder nicht. Im ersteren Falle wurde die einhüllende Curve von allen Schnittpunkten „consecutiver" Curven der Schaar gebildet. Man kann auch sagen, dass die einzelne Curve der Schaar ein Bogendifferential der einhüllenden Curve liefert; dasselbe würde eingegrenzt sein durch zwei unendlich nahe Punkte, in denen die herausgegriffene Curve von der zunächst voraufgehenden und der nächstfolgenden Curve der Schaar geschnitten wird.

Hieraus folgt, dass die einhüllende Curve an der von der einzelnen Curve der Schaar gelieferten Stelle letztere Curve berührt und also mit ihr gemeinsame Tangentenrichtung hat.

Hat somit eine Schaar von Integralcurven einer Differentialgleichung eine einhüllende Curve, so hat letztere in allen ihren Punkten die durch die Differentialgleichung geforderte Richtung.

Lehrsatz: *Besitzt die Schaar der Integralcurven eine einhüllende Curve, so liefert letztere ein Integral der Differentialgleichung, welches keine willkürliche Constante mehr enthält, aber gleichwohl nicht zu den particulären Integralen gehört. Man bezeichnet das so gewonnene Integral als ein „singuläres".*

Dies Ergebniss lässt sich auch durch Rechnung begründen.

Aus der Gleichung $g(x, y, C) = 0$ der Schaar entspringt nach XIV, 5 diejenige der einhüllenden Curve, indem man C aus

$$(1) \quad \ldots \quad g(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

eliminirt. Dies werde so vollzogen, dass man aus der zweiten Gleichung C als Function von x, y berechnet, $C = h(x, y)$, und diesen Werth von C in die erste Gleichung einträgt:

$$g(x, y, C) = 0, \quad C = h(x, y).$$

Um die Richtung der einhüllenden Curve an der Stelle x, y zu bestimmen, gehen wir auf dieser Curve zu dem mit x, y nächst benachbarten Punkte der Coordinaten $x + dx$, $y + dy$. Hierbei gilt:

$$(2) \quad \ldots \quad \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial C} dC = 0,$$

wo für C (in den partiellen Ableitungen) und für dC zu setzen ist:

$$(3) \quad \ldots \quad C = h(x, y), \quad dC = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy.$$

Aber dieser Werth C berechnete sich durch Auflösung der zweiten Gleichung (1) nach C. Also wird nach Eintragung von $C = h(x, y)$ in (2) die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial C}$ im dritten Gliede dieser Gleichung verschwinden, so dass sich die Richtung der einhüllenden Curve berechnet aus:

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0.$$

Andererseits liefert das vorliegende C die zur Stelle x, y der einhüllenden Curve gehörende Curve der Schaar $g(x, y, C) = 0$. Die Richtung dieser Curve wird somit gleichfalls durch Formel (4) angegeben, so dass letztere Curve an der Stelle x, y in der That mit der einhüllenden Curve gleichgerichtet ist. —

Beispiel: Die Differentialgleichung zweiten Grades:

$$y y'^2 - 2 x y' + y = 0$$

liefert, nach y' aufgelöst:

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}.$$

Die hier auftretende Function $G(x, y)$ ist auf den durch

$$(6) \quad \ldots \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x \pm y = 0$$

dargestellten beiden Geraden der xy-Ebene eindeutig. In denjenigen durch diese beiden Geraden gebildeten Quadranten, welche von der x-Axe durchzogen sind, ist $G(x, y)$ zweideutig, in den beiden anderen nulldeutig [1]).

Jene beiden Quadranten werden schlicht von Integralcurven bedeckt sein, und zwar laufen durch jeden Punkt zwei solche hindurch; die letzteren Quadranten sind indess frei von Integralcurven.

---

[1]) Im Anschluss an I, 5 heisst $G(x, y)$ für ein Werthepaar x, y nulldeutig, falls für letzteres $G(x, y)$ keinen *reellen* Werth besitzt.

Gleichung (6) stellt demnach die in zwei Geraden zerfallende einhüllende Curve dar und liefert dieserhalb ein singuläres Integral.

Um dies durch Rechnung zu bestätigen, führe man an Stelle von y die neue Variabele ein:

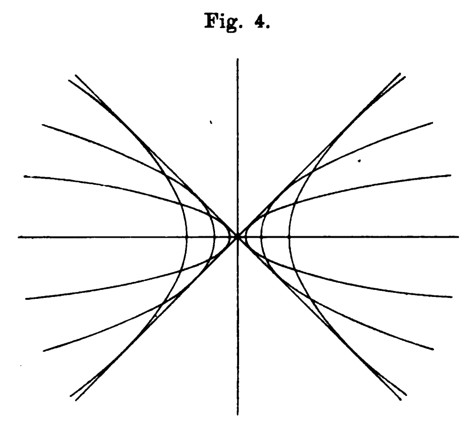
$$z = \frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}$$

und findet hieraus:

$$y = \frac{2xz}{1+z^2}, \quad y' = 2\,\frac{xz'(1-z^2) + z(1+z^2)}{(1+z^2)^2}.$$

Die Differentialgleichung transformirt sich in:

Fig. 4.



$$2x\frac{dz}{dx} + z(1+z^2) = 0,$$

die nach Nr. 9 (S. 7) leicht lösbar ist.

Nach Wiedereinführung von y ergiebt sich als allgemeines Integral von (5):

$$y^2 - 2Cx + C^2 = 0.$$

Hierdurch ist ein *Schaar von Parabeln* dargestellt (vergl. Fig. 4); deren einhüllende Curve durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$y^2 - 2Cx + C^2 = 0 \quad \text{und} \quad -x + C = 0$$

in der That die Gleichungsform (6) gewinnt.

16. Von den isogonalen Trajectorien einer Curvenschaar.

Erklärung: *Eine Curve, welche die Curven einer gegebenen Schaar immer unter dem gleichen Winkel ϑ durchschneidet, heisst eine „gleichwinklige" oder „isogonale Trajectorie" dieser Schaar. Ist insbesondere ϑ ein rechter Winkel, so spricht man von einer „orthogonalen Trajectorie".*

Die gegebene Schaar, welche durch $g(x, y, C) = 0$ dargestellt sein mag, besitzt stets eine ganze Schaar isogonaler Trajectorien eines gegebenen Winkels ϑ, die wir etwa durch $g_1(x, y, C_1) = 0$ dargestellt denken. Offenbar ist das Verhältniss beider Schaaren ein gegenseitiges.

Als Beispiel benutze man die Schaar aller Geraden durch den Nullpunkt der xy-Ebene. Die concentrischen Kreise um diesen Punkt liefern dann die Schaar der orthogonalen Trajectorien (vergl. Fig. 5).

Bei gegebener Schaar $g(x, y, C) = 0$ kann man die Differentialgleichung für die Schaar der Trajectorien des Winkels ϑ in folgender Art aufstellen.

Ein beliebiger Punkt P habe die Coordinaten x, y. Um die durch ihn hindurchziehende Curve der gegebenen Schaar zu finden, löse man $g(x, y, C) = 0$ nach C in $C = h(x, y)$ auf. Indem man die Coordinaten von P in $h(x, y)$ einsetzt, gewinnt man den zu der gewünschten Curve gehörenden Werth des Parameters C.

Fig. 5.

Die Richtung der fraglichen Curve im Punkte P ist durch:

$$(1)\quad tg\alpha = -\frac{g'_x(x, y, C)}{g'_y(x, y, C)},\quad C = h(x, y)$$

gegeben.

Die durch P hindurchziehende Trajectorie des Winkels ϑ liefert zufolge Fig. 6 folgenden Differentialquotienten bezw. folgende Richtung:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha_1 = tg\,(\vartheta + \alpha) = \frac{tg\,\vartheta + tg\,\alpha}{1 - tg\,\vartheta\, tg\,\alpha}.$$

Trägt man für $tg\,\alpha$ den in (1) berechneten Ausdruck ein, so ergiebt sich der

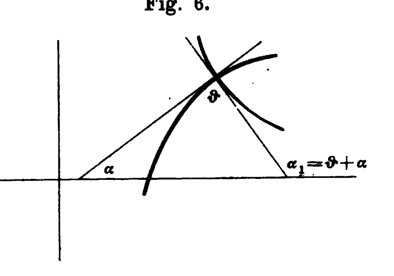
Lehrsatz: *Die Differentialgleichung der zur Schaar $g(x, y, C) = 0$ gehörenden isogonalen Trajectorien des Winkels ϑ entspringt durch Elimination von C aus $g(x, y, C) = 0$ und:*

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx}(\sin\vartheta\, g'_x + \cos\vartheta\, g'_y) + (\cos\vartheta\, g'_x - \sin\vartheta\, g'_y) = 0.$$

Speciell für die orthogonalen Trajectorien lautet die Gleichung (2):

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx}\, g'_x - g'_y = 0. -$$

Fig. 6.

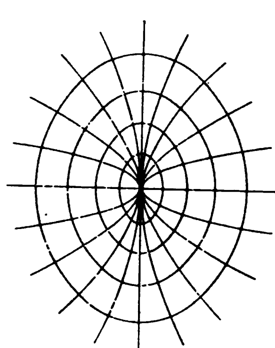


Beispiel: Durch $y^2 - Cx = 0$ ist die Schaar aller Parabeln dargestellt, welche den Nullpunkt zum Scheitelpunkte und die x-Axe zur Axe haben.

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien ergiebt sich durch Elimination von C aus:

$$C\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \text{und} \quad y^2 - Cx = 0$$

Fig. 7.



und hat somit die Gestalt:

$$2x\,dx + y\,dy = 0.$$

Durch Integration findet man als Gleichung $g_1(x, y, C_1) = 0$ der Schaar der Trajectorien:

$$2x^2 + y^2 = C_1.$$

Hierdurch ist eine Schaar von Ellipsen dargestellt, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte und eine auf der y-Axe gelegene grosse Axe haben. In Fig. 7 sind diese Verhältnisse zur Darstellung gebracht.

XVI. Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Variabelen.

---

1. Definition und Gradeintheilung der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Erklärung: *Eine Gleichung:*

$$(1) \quad \ldots \quad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x, einer Function y derselben und den Ableitungen y', y'', ... von y nach x heisst eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, wenn die Ableitung n^{ter} Ordnung $y^{(n)}$, aber keine Ableitung noch höherer Ordnung in ihr auftritt.

Man spricht auch von *„gewöhnlichen“* Differentialgleichungen höherer Ordnung im Gegensatz zu *„partiellen“*, bei denen mehrere unabhängige Variabelen vorliegen.

Die Theorie der Differentialgleichungen (1) behandelt die Aufgabe, im Einzelfalle die Lösungen oder Integrale der Differentialgleichung zu finden, d. h. diejenigen Functionen $y = f(x)$ herzustellen, für deren einzelne die Gleichung:

$$(2) \quad \ldots \quad F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)] = 0$$

zu einer in x identisch bestehenden wird.

Ist die linke Seite der Gleichung (1) in $y, y', \ldots, y^{(n)}$ rational und ganz, so liefert die Summe der Exponenten von $y, y', \ldots, y^{(n)}$ im einzelnen Gliede den „*Grad*" dieses Gliedes.

Erklärung: *Man spricht in diesem Falle von einer Differentialgleichung „m^{ten} Grades", falls in $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ein Glied m^{ten} Grades, jedoch keines von noch höherem Grade wirklich vorkommt.*

Eine Differentialgleichung ersten Grades heisst auch „*linear*". Dieselbe lässt sich auf die Gestalt bringen:

$$F_0(x)y^{(n)} + F_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + F_{n-1}(x)y' + F_n(x)y = F_{n+1}(x),$$

wo die „Coëfficienten" $F_0, F_1, \ldots$ der einzelnen Ableitungen $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}, \ldots$ irgend welche Functionen von x sind.

Durch Division mit $F_0(x)$ kann man den Coëfficienten von $y^{(n)}$ gleich 1 machen.

Erklärung: *Als „Normalform" einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gilt:*

$$(3) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = Q(x),$$

wo $P_1(x), \ldots, P_n(x), Q(x)$ irgend welche Functionen von x sind und die Ableitungen $y', y'', \ldots$ als Differentialquotienten geschrieben wurden.

Ist $Q(x)$ stets $= 0$, so heisst die Differentialgleichung (3) „homogen".

2. Auflösung der Differentialgleichungen $y^{(n)} = G(x)$.

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung ist im Allgemeinen nicht durch Quadraturen lösbar; doch gelingt dies in speciellen Fällen zu denen in erster Linie die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = G(x)$$

gehört, unter $G(x)$ eine Function von x allein verstanden.

Die linke Seite von (1) ist die erste Ableitung von $y^{(n-1)}$, so dass man aus (1) folgert:

$$dy^{(n-1)} = G(x)\,dx.$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus:

$$y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int G(x)\,dx + C_1,$$

wo C_1 eine erste willkürlich zu wählende Constante ist.

Durch wiederholte Anwendung des gleichen Verfahrens gewinnt man den

Lehrsatz: *Das „allgemeine" Integral der Differentialgleichung (1) ist:*

$$(2) \quad y = \int^{(n)} G(x)\,dx^n + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n,$$

wo im ersten Gliede rechter Hand n Male hinter einander integrirt ist, und wo die n Constanten $C_1, \ldots, C_n$ willkürlich wählbar sind.

Diese Constanten lassen sich dadurch bestimmen, dass man für n verschiedene Argumente x zugehörige Werthe der Integralfunction y vorschreibt; man gelangt so zu einem „particulären" Integrale der Differentialgleichung (1).

3. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y', y'') = 0$.

Es sollen zweitens die Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(y', y'') = 0$$

betrachtet werden, in denen nur die zweite und erste Ableitung der gesuchten Function, aber weder diese selbst noch x auftritt.

Man löse die Gleichung (1) nach y'' auf:

$$y'' = G(y')$$

und substituire $y' = z$, wodurch man erhält:

$$\frac{dz}{dx} = G(z), \qquad dx = \frac{dz}{G(z)}.$$

Die Integration liefert:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad x + C_1 = \int \frac{dz}{G(z)},$$

eine Gleichung, deren Auflösung nach z ergeben mag:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = H(x, C_1).$$

Setzt man jetzt für z wieder $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$dy = H(x, C_1)\, dx,$$

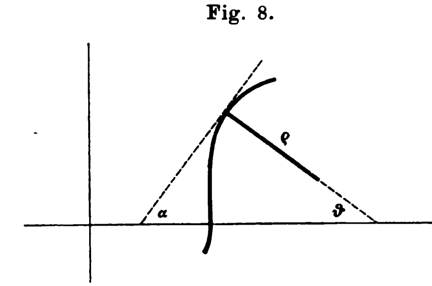
so dass eine erneute Integration die gesuchte Function:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad y = \int H(x, C_1)\, dx + C_2$$

liefert.

Lehrsatz: *Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher x und y selber nicht vorkommen, ist durch zwei Quadraturen lösbar, wobei sich im „allgemeinen" Ingetral (4) zwei willkürliche Constanten C_1 und C_2 einfinden.* —

Fig. 8.



Beispiel: Es sollen diejenigen Curven gefunden werden, für welche die Projection des Krümmungsradius auf die x-Axe beständig gleich 1 ist.

Für den Krümmungsradius ϱ und den Cosinus seines Neigungswinkels ϑ gegen die x-Axe (vergl. Fig. 8) hat man folgende Gleichungen:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \cos\vartheta = \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

wie aus V, 7 und II, 2 hervorgeht.

Die Forderung $\varrho \cos\vartheta = 1$ liefert für die gesuchten Curven die Differentialgleichung:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0.$$

Durch Einführung von $z = y'$ gewinnen wir:

$$\frac{dz}{dx} = z(1 + z^2) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dz}{z} - \frac{z\,dz}{1 + z^2},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\log z - \log \sqrt{1 + z^2} = x + C_1 \quad \text{oder} \quad \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = e^{x + C_1}.$$

Zur Abkürzung schreibe man weiter:

$$u = e^{x + C_1}, \quad \text{so dass} \quad du = u\,dx$$

wird, während sich z in u wie folgt darstellt:

$$z = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Setzt man jetzt $z = y'$ ein, so ergiebt sich:

$$dy = \frac{u\,dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \text{und also} \quad dy = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Die zweite Integration liefert $y + C_2 = \arcsin u$, ein Ergebniss, welches durch Wiedereinführung von x und einfache Umgestaltung als allgemeine Integralgleichung liefert:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad x + C_1 = \log\sin(y + C_2).$$

Nimmt man $C_1 = C_2 = 0$, so folgt:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \log\sin y,$$

wodurch x in y als eine ein- bezw. nulldeutige Function dargestellt ist, je nachdem $\sin y > 0$ oder < 0 ist.

Die durch Gleichung (7) dargestellte Curve besteht aus unendlich vielen congruenten Zweigen, deren erster in Fig. 9 dargestellt ist und die beiden Geraden $y = 0$, $y = \pi$ zu Asymptoten hat. Die übrigen Zweige entstehen aus jenem ersten durch Verschiebung um $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ im Sinne der y-Axe.

Fig. 9.

Alle übrigen Curven (6) erhält man aus der hiermit betrachteten durch Parallelverschiebung in der xy-Ebene.

4. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Die Entwickelungen der beiden letzten Nummern liefern auch die Mittel zur Auflösung der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

in welcher ausser der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von y keine weitere Ableitung und auch x und y selbst nicht vorkommen.

Man löse Gleichung (1) nach $y^{(n)}$ auf:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \tag{2}$$

und führe $y^{(n-1)}$ als neue Variabele z ein, womit die Gleichung (2) die Gestalt annimmt:

$$\frac{dz}{dx} = G(z) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dz}{G(z)}. \tag{3}$$

Die Integration liefert genau wie in Nr. 3:

$$x + C_1 = \int \frac{dz}{G(z)}, \tag{4}$$

eine Gleichung, die man nach Ausrechnung des rechts stehenden Integrals auf die Form bringen wolle:

$$z = H(x, C_1). \tag{5}$$

Durch Wiedereinführung von $y^{(n-1)}$ statt z entspringt:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = H(x, C_1), \tag{6}$$

womit wir auf eine Differentialgleichung (1), Nr. 2 geführt sind:

Lehrsatz: *Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, in welcher einzig $y^{(n)}$ und $y^{(n-1)}$ auftreten, lässt sich durch Ausführung einer Quadratur auf eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des in Nr. 2 behandelten Typus zurückführen. Letztere Differentialgleichung wird unmittelbar durch $(n-1)$ weitere Quadraturen gelöst. Insgesammt stellen sich n willkürliche Constanten ein.*

5. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y, y'') = 0$.

Als weiteres Beispiel einer durch Quadraturen auflösbaren Differentialgleichung betrachten wir:

$$F(y, y'') = 0, \tag{1}$$

wo neben der unbekannten Function y selbst nur noch deren zweite Ableitung auftritt.

Durch Auflösung nach y'' setze man Gleichung (1) in die Gestalt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = G(y) \tag{2}$$

und multiplicire mit $2\,dy$:

$$(3) \quad \dots\dots \quad 2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx = 2\,G(y)\,dy.$$

Zur Umformung der linken Seite benutze man:

$$d\,(y'^2) = 2\,y'\,dy' = 2\,y'.y''\,dx,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx,$$

womit sich unsere Differentialgleichung in die neue Gestalt transformirt:

$$(4) \quad \dots\dots \quad d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2\,G(y)\,dy.$$

Gleichung (4) gestattet unmittelbar die Integration und liefert:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int G(y)\,dy + C_1, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int G(y)\,dy + C_1}}.$$

Nochmalige Integration liefert die allgemeine Integralgleichung.

Lehrsatz: *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2), in welcher x und y' nicht vorkommen, lässt sich durch zwei Quadraturen auflösen und liefert als allgemeine Integralgleichung:*

$$(5) \quad \dots \quad x = \int\frac{dy}{\sqrt{2\int G(y)\,dy + C_1}} + C_2. -$$

Beispiel: Es soll das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu^2 y$$

berechnet werden.

Die mit $2\,dy$ multiplicirte Differentialgleichung ist:

$$2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx = d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \mu^2\,.\,2\,y\,dy.$$

Durch Integration folgt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mu^2\,(y^2 + C_1),$$

$$\mu\,dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1}},$$

so dass die zweite Integration auf die Gleichung führt:

$$\mu x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + C_1}\right) + C_2.$$

Um das allgemeine Integral y explicit zu berechnen, entnehmen wir aus der letzten Gleichung:

$$y + \sqrt{y^2 + C_1} = e^{\mu x - C_2},$$

$$-\,y + \sqrt{y^2 + C_1} = C_1\,e^{-\mu x + C_2}.$$

Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten folgt:

$$2y = e^{-C_2} \cdot e^{\alpha x} - C_1 e^{C_2} \cdot e^{-\alpha x}.$$

Setzt man hier zur Abkürzung:

$$e^{-C_2} = 2A, \qquad -C_1 e^{C_2} = 2B,$$

so entspringt als einfachste Gestalt der gesuchten Integralfunction:

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

wo A und B willkürliche Constanten sind.

6. Auflösung der Differentialgleichungen $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$.

Die Methode der voraufgehenden Nummer überträgt sich unmittelbar auf die Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung:

(1) . . . . $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0.$

in denen neben der n^{ten} Ableitung der gesuchten Function nur noch die $(n-2)^{\text{te}}$ vorkommt.

Eine vorgelegte Gleichung (1) löse man nach $y^{(n)}$ auf:

(2) . . . . $y^{(n)} = G(y^{(n-2)})$

und substituire demnächst für $y^{(n-2)}$ die neue Variabele z:

$$y^{(n-2)} = z, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = G(z).$$

Die damit erhaltene Differentialgleichung zweiter Ordnung für z liefert nach Nr. 5 als allgemeine Integralgleichung:

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{2\int G(z)\,dz + C_1}} + C_2.$$

Nach Berechnung des Integralausdruckes rechter Hand denke man die zwischen x und z erhaltene Gleichung nach z aufgelöst:

$$z = H(x, C_1, C_2)$$

und führe hier wieder y ein.

Lehrsatz: *Die Differentialgleichung (1), in welcher neben $y^{(n)}$ nur $y^{(n-2)}$ auftritt, kann in der bezeichneten Weise durch Ausführung zweier Quadraturen auf die Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:*

(3) . . . . $\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = H(x, C_1, C_2)$

reducirt werden, welche letztere nach Nr. 2 durch weitere $(n-2)$ Quadraturen lösbar ist.

7. Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

Unter den Differentialgleichungen höherer Ordnung sind es vor allen die „*linearen*“, welche ausführlich untersucht worden sind.

Es sollen zunächst einige Sätze über „*homogene*" lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung aufgestellt werden. Die Normalform einer solchen Differentialgleichung ist nach S. 19:

$$(1)\quad \frac{d^n y}{d x^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{d y}{d x} + P_n(x)\, y = 0,$$

wo die $P_k(x)$ beliebige Functionen von x sind; zur Abkürzung soll die linke Seite der Gleichung (1) symbolisch durch $\Phi(y)$ bezeichnet werden.

Lehrsatz: *Ist y ein Integral der Differentialgleichung (1), so genügt derselben auch die Function Cy, unter dem Factor C eine beliebige Constante verstanden.*

Tritt nämlich Cy an Stelle von y, so tritt Cy' an Stelle von y', ..., und also folgt bei der Bauart der linken Seite $\Phi(y)$ von (1):

$$\Phi(Cy) = C\,.\,\Phi(y).$$

Ist $\Phi(y) = 0$, d. h. ist y ein Integral von (1), so folgt auch $\Phi(Cy) = 0$, so dass Cy in der That auch ein solches ist.

Lehrsatz: *Sind $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ Integrale der Differentialgleichung (1), so ist auch:*

$$(2)\quad \ldots\ldots \quad y = y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu$$

ein solches.

In Folge der Bauart der linken Seite von (1) ist nämlich:

$$\Phi(y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2) + \cdots + \Phi(y_\nu).$$

Hier sind aber sämmtliche Glieder der rechten Seite gleich 0; es ist also auch $\Phi(y) = 0$, d. h. y genügt der Gleichung (1).

Durch Zusammenfassung der beiden aufgestellten Sätze ergiebt sich als dritter

Lehrsatz: *Sind $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ irgend welche ν particuläre Integrale der Differentialgleichung (1), so genügt derselben auch die Function:*

$$(3)\quad \ldots\ldots \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu,$$

wo $C_1, \ldots, C_\nu$ irgend ν Constanten bedeuten.

Hieran schliesst sich der folgende für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen fundamentale

Lehrsatz: *Es lassen sich (und zwar auf unendlich viele Weisen) n particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (1) auswählen, so dass nicht nur jede mit irgend welchen n Constanten C gebildete Function:*

$$(4)\quad \ldots\ldots \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

eine Lösung von (1) darstellt, sondern dass umgekehrt „jedes" Integral y der Differentialgleichung (1) durch $y_1, \ldots, y_n$ in der Gestalt (4) darstellbar ist.

Der Nachweis dieses Satzes, welcher weitgehende functionentheoretische Vorbereitungen erfordern würde, soll hier nicht gegeben werden.

8. Lineare homogene Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten.

Als Beispiel betrachten wir die lineare homogene Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

mit constanten Coëfficienten $a_1, \ldots, a_n$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung gelingt durch die Exponentialfunction $y = e^{\mu x}$, unter μ eine sogleich näher zu bestimmende Constante verstanden.

Setzen wir nämlich:

$$y = e^{\mu x}, \quad \frac{dy}{dx} = \mu e^{\mu x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mu^2 e^{\mu x}, \ldots$$

in (1) ein, so gewinnen wir:

$$y\,(\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n) = 0.$$

Wenn wir demnach μ als Wurzel der algebraischen Gleichung:

$$(2) \qquad \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0$$

auswählen, so wird $y = e^{\mu x}$ eine Lösung von (1) darstellen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gleichung (2) *lauter verschiedene Wurzeln* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ habe; dann gilt der

Lehrsatz: *Die homogene lineare Differentialgleichung (1) mit constanten Coëfficienten besitzt den n verschiedenen Wurzeln* $\mu_1 \ldots, \mu_n$ *der algebraischen Gleichung (2) entsprechend die n particulären Integrale:*

$$(3) \quad \ldots \quad y_1 = e^{\mu_1 x}, \; y_2 = e^{\mu_2 x}, \ldots, y_n = e^{\mu_n x},$$

in denen sich das „allgemeine" Integral in der Gestalt:

$$(4) \quad \ldots \quad y = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x} + \cdots + C_n e^{\mu_n x}$$

darstellt.

Sind $a_1, \ldots, a_n$ (was hier überall als Voraussetzung gilt) reell, so können complexe Wurzeln der Gleichung (2) nach X, 1 nur paarweise conjugirt vorkommen.

Mögen etwa μ_1 und μ_2 conjugirt complex sein:

$$\mu_1 = \varkappa + i\lambda, \quad \mu_2 = \varkappa - i\lambda,$$

so kann man zur Vermeidung der „complexen" Functionen y_1, y_2 folgende reelle Functionen an ihre Stelle treten lassen:

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} \bar{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\varkappa x} \cos \lambda x, \\[2ex] \bar{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\varkappa x} \sin \lambda x. \end{cases}$$

In ihnen drücken sich die beiden ursprünglich gewählten particulären Integrale y_1, y_2 so aus:

$$(6) \quad \ldots \quad y_1 = \bar{y}_1 + i\bar{y}_2, \quad y_2 = \bar{y}_1 - i\bar{y}_2.$$

9. Lineare nicht-homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

Die Normalform der linearen nicht-homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist nach S. 19:

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = Q(x).$$

Die linke Seite dieser Gleichung bezeichnen wir wie bisher abgekürzt durch das Symbol $\Phi(y)$, so dass $\Phi(y) = Q(x)$ die gegebene Gleichung ist.

Die Gleichung $\Phi(y) = 0$ bezeichnen wir als die *zur gegebenen Differentialgleichung gehörende „homogene" lineare Differentialgleichung.* Von letzterer denken wir n solche particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Functionen von x bereits berechnet, in denen jedes Integral von $\Phi(y) = 0$ durch

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

darstellbar ist; es werden hierbei vor allem die Gleichungen gelten:

$$(3) \quad \ldots \quad \Phi(y_1) = 0, \quad \Phi(y_2) = 0, \ldots, \quad \Phi(y_n) = 0.$$

Man setze nun in (2) an Stelle der $C_1, \ldots, C_n$ n noch nicht näher bestimmte Functionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ von x ein und versuche mit der so entspringenden Function:

$$(4) \quad \ldots \quad y = \varphi_1(x) \cdot y_1 + \varphi_2(x) \cdot y_2 + \cdots + \varphi_n(x) \cdot y_n$$

von x der Gleichung (1) zu genügen.

Hierbei bemerke man, dass man über die Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ willkürlich verfügen darf, dann aber immer noch φ_n so bestimmen kann, dass y eine gewünschte Function, hier ein Integral von (1) wird. Man kann die Sachlage auch dahin aussprechen, dass man für die n Functionen φ von vornherein $(n-1)$ Bedingungen willkürlich vorschreiben darf. In diesem Sinne bestimmen wir, dass die folgenden $(n-1)$ Gleichungen bestehen sollen:

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 \dfrac{d\varphi_1}{dx} + y_2 \dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + y_n \dfrac{d\varphi_n}{dx} = 0, \\[2ex] \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{d\varphi_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \dfrac{dy_n}{dx}\dfrac{d\varphi_n}{dx} = 0, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}}\dfrac{d\varphi_1}{dx} + \dfrac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}}\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}}\dfrac{d\varphi_n}{dx} = 0. \end{cases}$$

Um die unter (4) definirte Function y in (1) einzuführen, berechne man zunächst die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots$. Unter Rücksicht auf

die jetzt zur Geltung kommenden Gleichungen (5) findet man folgende Reihe von Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} y = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \cdots + \varphi_n y_n, \\ \frac{dy}{dx} = \varphi_1 \frac{dy_1}{dx} + \varphi_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + \varphi_n \frac{dy_n}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + \varphi_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + \varphi_n \frac{d^2y_n}{dx^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}. \end{cases}$$

Hingegen erhält man für die n^{te} Ableitung den $2n$-gliedrigen Ausdruck:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{d^ny}{dx^n} = \varphi_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + \cdots + \varphi_n \frac{d^ny_n}{dx^n} + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_1}{dx} + \cdots \\ \qquad + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_n}{dx}. \end{cases}$$

Zu dieser letzteren Gleichung addire man nun die Gleichungen (6), nachdem man sie bezw. mit $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, ..., $P_1(x)$ multiplicirt hat; es ergiebt sich unter Benutzung der Abkürzung $\Phi(y)$:

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi(y) = \varphi_1 \Phi(y_1) + \cdots + \varphi_n \Phi(y_n) + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_1}{dx} + \cdots \\ \qquad + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_n}{dx}. \end{cases}$$

In Folge von (3) verschwinden hier die n ersten Glieder rechter Hand, und es wird demnach y in der That eine Lösung der Gleichung $\Phi(y) = Q(x)$ darstellen, wenn die Gleichung gilt:

$$(9)\quad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{d\varphi_n}{dx} = Q(x).$$

Diese Gleichung reihen wir als n^{te} den $(n-1)$ voraufgehenden Gleichungen (5) an und besitzen damit ein *System von n Gleichungen mit den n linear vorkommenden Unbekannten* $\frac{d\varphi_1}{dx}, \frac{d\varphi_2}{dx}, \cdots, \frac{d\varphi_n}{dx}$, wobei die Coëfficienten dieser Gleichungen $y_1, y_2, \cdots, \frac{dy_1}{dx}, \cdots, Q(x)$ *bekannte Functionen von x sind.*

Wie eingehendere Untersuchungen zeigen, hat die Auflösung dieses Gleichungssystems nach $\frac{d\varphi_1}{dx}, \cdots$ keine Schwierigkeit, und man lernt auf diese Weise $\frac{d\varphi_1}{dx}, \cdots \frac{d\varphi_n}{dx}$ als Functionen von x kennen:

$$(10) \quad . \quad . \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = \psi_1(x), \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \psi_2(x), \cdots, \frac{d\varphi_n}{dx} = \psi_n(x).$$

Die Integration dieser n Gleichungen führt auf folgenden

Lehrsatz: *Ist das allgemeine Integral (2) der homogenen Differentialgleichung $\Phi(y) = 0$ bereits bekannt, so kann man das allgemeine Integral der vorgelegten nichthomogenen Differentialgleichung (1) durch Ausführung von n Quadraturen in der Gestalt berechnen:*

$$(11) \quad \begin{cases} y = y_1 \int \psi_1(x)\,dx + \cdots + y_n \int \psi_n(x)\,dx \\ \qquad + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten die ψ Functionen von x, welche man aus den Functionen $y_1, \ldots, y_n$ durch Differentiation und Auflösung von n linearen Gleichungen in der soeben bezeichneten Weise zu berechnen hat.

Die hier entwickelte Auflösung der linearen nichthomogenen Differentialgleichung (1) wird als die „*Methode der Variation der Constanten*" bezeichnet, insofern an Stelle der Constanten C in (2) variabele Grössen $\varphi_n(x)$ in (4) treten. Diese Methode ist von Lagrange aufgestellt.

10. Lösung von Differentialgleichungen durch unendliche Reihen. Die hypergeometrische Reihe.

Wenn man eine vorgelegte Differentialgleichung nicht durch eine bekannte Function y auflösen kann, so ist der Versuch angezeigt, eine der Differentialgleichung genügende Function y in Gestalt einer nach Potenzen von x fortscheitenden unendlichen Reihe von einfachem Bildungsgesetze anzugeben oder, wie man sagt, „*die Differentialgleichung vermöge einer unendlichen Reihe zu integriren*".

Man setzt hierbei zunächst die Reihe für y mit unbestimmten Coëfficienten an:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

berechnet hieraus y', y'', ... und trägt diese Ausdrücke in die gegebene Differentialgleichung:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

ein.

Die so entspringende Gleichung enthält nur noch x und muss für jeden Werth von x richtig sein.

Lässt sich demnach die linke Seite der fraglichen Gleichung selbst wieder nach Potenzen von x anordnen, so wird nach einem in VII, 13 genannten Satze jeder einzelne Coëfficient dieser Reihe verschwinden.

Man gewinnt so unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten a_0, a_1, a_2, ... im Ansatze (1).

Die entspringende Reihe (1) wird *innerhalb ihres Convergenzbezirks* eine der Differentialgleichung genügende Function darstellen. —

Der vorstehende Ansatz soll nunmehr auf die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(3) \quad . \quad . \quad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(1+\alpha+\beta)x-\gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

angewandt werden, wobei α, β, γ irgend welche reelle Constanten sind, von denen jedoch die dritte γ weder gleich 0 noch gleich einer negativen ganzen Zahl sein soll.

In (3) haben wir einzutragen:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k,$$

und es muss alsdann:

$$x(x-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + [(1+\alpha+\beta)x-\gamma]\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k + \alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

für alle Werthe x richtig sein.

Bei der Anordnung nach ansteigenden Potenzen von x wird man setzen:

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k = \sum_{k'=2}^{\infty} k'(k'-1)\, a_{k'} x^{k'} = \sum_{k'=0}^{\infty} k'(k'-1)\, a_{k'} x^{k'}$$

und darf demnächst den Index am Summationsbuchstaben k' wieder unterdrücken.

Indem man mit den übrigen Gliedern der vorletzten Gleichung ähnlich verfährt, lässt sich dieselbe in folgende Gestalt überführen:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\alpha)(k+\beta)a_k - (k+1)(k+\gamma)a_{k+1}]\, x^k = 0.$$

Hier muss der Coëfficient jeder einzelnen Potenz x^k verschwinden, so dass wir mit Rücksicht auf die über γ gemachte Voraussetzung für die Berechnung der a_k folgende Recursionsformel gewinnen:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_{k+1} = a_k \cdot \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}.$$

Setzt man noch $a_0 = 1$, so sind alle weiteren a_k auf Grund von (4) eindeutig bestimmt.

Für den Quotienten zweier auf einander folgender Glieder u_{k+1} und u_k unserer Reihe finden wir:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1 + \frac{\alpha}{k}}{1 + \frac{1}{k}} \cdot \frac{1 + \frac{\beta}{k}}{1 + \frac{\gamma}{k}} \cdot x,$$

woraus wir weiter schliessen:

$$\lim_{k=\infty} \cdot \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = | x |.$$

Das Convergenzintervall (vergl. VII, 5) der erhaltenen Reihe ist somit durch $-1 < x < +1$ gegeben.

Lehrsatz: *Die homogene lineare Differentialgleichung (3) lässt sich vermöge der unendlichen Reihe:*

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} y = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots \end{cases}$$

auflösen, d. h. die durch diese Potenzreihe innerhalb ihres Convergenzintervalls $-1 < x < +1$ *definirte Function stellt ein particuläres Integral der Differentialgleichung (3) dar.* —

Die in (5) gewonnene unendliche Reihe heisst die „*hypergeometrische Reihe*"; sie wurde zuerst von Gauss ausführlich untersucht und wird nach ihm abgekürzt durch das Symbol $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ bezeichnet.

Durch geeignete specielle Auswahlen der α, β, γ kann man in $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ zahlreiche besondere Functionen, insbesondere auch elementare wiedergewinnen.

So liefert z. B. $F(1, 1, 2; x)$ mit dem Factor x versehen die aus VII, 11 bekannte Logarithmusreihe:

$$\log(1 + x) = x F(1, 1, 2; x).$$

Für $\alpha = -m$, $\beta = \gamma = 1$ gelangen wir nach Zeichenwechsel von x zur Binomialreihe (vergl. VII, 12):

$$(1 + x)^m = F(-m, 1, 1; -x).$$

$F(1/2, 1/2, 3/2; x^2)$ ergiebt, mit dem Factor x versehen, nach kurzer Zwischenrechnung die in VII, 13 aufgestellte Reihe der Function *arc sin x*:

$$\arcsin x = x F(1/2, 1/2, 3/2; x^2).$$

Betrachten wir etwa endlich noch $F\left(m, 1, 1; \frac{x}{m}\right)$ für ein unendlich wachsendes m. Der Grenzübergang führt zur Exponentialreihe, die in VII, 9 aufgestellt wurde:

$$e^x = \lim_{m=\infty} F\left(m, 1, 1; \frac{x}{m}\right).$$

XVII. Capitel.

Andeutungen über Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabelen.

1. Systeme simultaner Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen.

Es seien x, y, z drei reelle Variabelen, deren erste unabhängig sei, während y und z von x abhängen sollen.

Zur näheren Bestimmung dieser Abhängigkeit sollen zwei Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} F_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0 \end{cases}$$

vorgelegt sein, in denen neben x, y, z noch die Ableitungen von y und z nach x bis zu einer gewissen Ordnung vorkommen mögen.

Erklärung: *Man sagt, durch (1) sei ein System „simultaner" Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen x und zwei gesuchten Functionen y, z gegeben; dabei soll die Anzahl der Gleichungen mit derjenigen der gesuchten Functionen gleich sein.*

Die in den beiden voraufgehenden Capiteln erörterten Definitionen und Grundprobleme wird man hier leicht übertragen.

Die höchste vorkommende Ordnung einer Ableitung liefert die *Ordnung des Systems simultaner Differentialgleichungen.*

Liegt insbesondere die *erste* Ordnung vor, so können wir durch Auflösung der beiden Gleichungen nach $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ das System in die Normalgestalt setzen:

$$(2) \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = G_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = G_2(x, y, z).$$

Die beiden Functionen:

$$(3) \quad \ldots \quad y = f_1(x), \quad z = f_2(x)$$

stellen ein *Lösungssystem oder ein System von Integralen der Gleichungen* (1) vor, falls

$$F_1[x, f_1(x), f_2(x), f_1'(x), f_2'(x), \ldots] = 0,$$
$$F_2[x, f_1(x), f_2(x), f_1'(x), f_2'(x), \ldots] = 0$$

zugleich in x identische Gleichungen sind.

Die in XV, 5 befolgte geometrische Methode, die Existenz von Integralen einer Gleichung $F(x, y, y') = 0$ anschaulich zu machen, lässt sich auf den Fall der Gleichungen (2) von der ersten Ordnung sofort übertragen.

Deutet man x, y, z als rechtwinklige Raumcoordinaten und denkt einen räumlichen Bereich eingegrenzt, in dem $G_1(x, y, z)$ und $G_2(x, y, z)$ eindeutige stetige Functionen sind, so geht durch jeden Punkt dieses Bereiches ein durch die Differentialgleichung selbst, nämlich durch:

$$dx : dy : dz = 1 : G_1(x, y, z) : G_2(x, y, z) \tag{4}$$

eindeutig bestimmtes Curvenelement hindurch; und alle diese Elemente werden eine *Schaar von zweifach unendlich vielen Integralcurven des Systems (2)* zusammensetzen.

Stellen wir diese Schaar zunächst durch zwei Gleichungen:

$$g_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad g_2(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \tag{5}$$

dar, so würde die Auflösung dieser Gleichungen explicite das System der Integrale:

$$(6) \quad \ldots \quad y = f_1(x, C_1, C_2), \quad z = f_2(x, C_1, C_2)$$

kennen lehren; wie man sieht, bleiben hier *zwei Constanten* willkürlich wählbar. —

Diese kurzen Andeutungen mögen am folgenden Beispiele erläutert werden:

$$(7) \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = y + z, \qquad \frac{dz}{dx} = y - z.$$

Um dieses System simultaner Differentialgleichungen zu lösen, berechne man aus der ersten Gleichung:

$$(8) \quad \ldots \quad z = \frac{dy}{dx} - y. \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man diese Werthe für z und $\frac{dz}{dx}$ in die zweite Gleichung (7), so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0.$$

Diese lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung kann nach XVI, 8 sofort gelöst werden. Nach Berechnung des allgemeinen Integrals y findet man z vermöge der ersten Gleichung (8):

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}},$$

$$z = C_1(-1 + \sqrt{2})e^{x\sqrt{2}} - C_2(1 + \sqrt{2})e^{-x\sqrt{2}}. \text{ —}$$

Endlich möge der Ansatz (1) noch für mehr als drei Variabelen formulirt werden.

Sind $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ Variabelen, von denen die erste unabhängig sei, während die n letzten von x abhängen sollen, so möge diese Abhängigkeit durch n Gleichungen:

$$(9) \quad . \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', y_1'', \ldots) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', y_1'', \ldots) = 0 \end{array} \right.$$

näher festgelegt sein; hierbei ist zur Abkürzung $y_1', \ldots$ für $\frac{d y_1}{d x}, \cdots$ gesetzt.

Erklärung: *Man sagt, durch (9) sei ein System von n „simultanen“ Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen x und n gesuchten Functionen $y_1, \ldots, y_n$ gegeben.*

Die weiter sich hier anschliessenden Definitionen und Problemstellungen sind denjenigen des Falles $n = 2$ analog.

2. Partielle Differentialgleichungen mit einer gesuchten Function.

Von den drei Variabelen x, y, z seien jetzt die beiden ersten unabhängig, während z von x und y abhängig sein soll.

Es sei eine Gleichung vorgelegt:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \cdots\right) = 0,$$

in welcher neben x, y, z noch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots$ auftreten.

Erklärung: *Die Gleichung (1) bezeichnet man als eine partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabelen x, y und einer gesuchten Function z.*

Man spricht von einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} „*Ordnung*“, falls n die höchste vorkommende Ordnung einer Ableitung ist.

Eine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung wird demnach gegeben sein durch:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Ist die linke Seite von (1) in z und den Ableitungen von z rational und ganz, so bezeichnet man die Summe der Exponenten von z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ im einzelnen Gliede als den „*Grad*“ dieses Gliedes und spricht von einer *Differentialgleichung m^{ten} Grades*, falls m der höchste vorkommende Grad eines Gliedes ist.

Eine partielle Differentialgleichung, die *linear* und von *erster* Ordnung ist, lässt sich hiernach auf die Gestalt bringen:

$$(3) \quad . \; . \; . \; F_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + F_2(x,y) \frac{\partial z}{\partial y} + F_3(x,y) z = F_4(x,y),$$

wo die F beliebige Functionen von x und y sind.

Wir werden jetzt weiter sagen, die Function $z = f(x, y)$ stelle *eine Lösung oder ein Integral der Differentialgleichung (1)* vor, falls die Einführung von $z = f(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \ldots$ in (1) eine *identische*, d. i. *für alle Werthepaare x, y bestehende Gleichung* liefert.

Hier treffen wir aber weit complicirtere Verhältnisse, wie wir an dem Beispiele einer beim integrirenden Factor oben aufgetretenen partiellen Differentialgleichung darthun wollen.

In der That subsumirt sich ja unter den Ansatz (3) die in XV, 14 unter (1) angegebene partielle Differentialgleichung für die daselbst mit $\mu(x, y)$ bezeichnete Function.

Aus XV, 12 geht hervor, dass, wenn $\mu(x, y)$ ein „particuläres" Integral jener Gleichung ist, auch jede Function:

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mu_1(x, y) = \mu(x, y)\, \chi\, [h(x, y)]$$

der Differentialgleichung genügt; hierbei war $h(x, y)$ eine $\mu(x, y)$ zugehörige, durch Quadraturen zu berechnende bestimmte Function, während χ eine *gänzlich willkürlich wählbare Function* bedeutet.

Ueberdies war jede der fraglichen Differentialgleichung genügende Function in der Gestalt (4) darstellbar.

Im Ausdruck des „allgemeinen" Integrals unserer partiellen Differentialgleichung ist demnach noch eine „willkürlich zu wählende Function" enthalten.

Was an diesem Beispiel im speciellen Falle hervortrat, ist ein allgemeiner Satz. Das Analogon der willkürlichen „Constanten" bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen ist hier bei den partiellen die *willkürliche „Function"*, welche im Ausdruck des allgemeinen Integrals enthalten ist. —

Es ist hier nicht der Ort, diese Gegenstände weiter zu verfolgen. Hinzugefügt sei nur noch die Angabe, dass die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Mechanik und theoretischen Physik eine fundamentale Rolle spielen; so tritt z. B. die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

in der Theorie der Wärmeleitung, die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

bei der Untersuchung der Schwingungen gespannter Saiten, die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

in der Potentialtheorie auf. —

Uebrigens wird es keine Schwierigkeit machen, den Ansatz (1) auf *partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Variabelen und einer gesuchten Function* zu verallgemeinern.

Die Hereinnahme der Ansätze von Nr. 1 würde noch etwas allgemeiner auf *Systeme von n simultanen partiellen Differentialgleichungen mit m unabhängigen Variabelen und n gesuchten Functionen* führen.

REGISTER.

[1]) II, 3 heisst Capitel II, Nr. 3.

